BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

СПЕКТРАЛЬНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.М.АХМЕДОВ, Н.Г.КУЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

Настоящая работа посвящена изучению спектральности и других спектральных свойств одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов в пространстве $H = L_2([0;1];C)$*, где* C *– комплексная плоскость. Доказаны спектральность и дискретность, а также безусловная базисность системы собственных и присоединенных элементов рассмотренных операторов.*

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)x(t) = \lambda x(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x(1)\cdot e^{ib}, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}(1)\, e^{ib}, \tag{2}$$

где $\dot{x}$ – производная по t, b – вещественное число, $0 < b < \pi$, $a(t) \in H$, такая, что $\|a(t)\|_H = a_0 < \infty$.

Пусть T – замкнутый оператор в пространстве $H = L_2([0,1];C)$, порожденный дифференциальным выражением $-\dfrac{d^2x}{dt^2}$ и граничными условиями (2).

Целью данной работы является доказательство дискретности и спектральности оператора $T + A$, а также указание других спектральных свойств этого оператора, где A – оператор умножения, определенный в виде

$$Ax(t) = a(t)x(t),$$

в пространстве H.

Отметим, что дискретность и спектральность оператора мы понимаем в смысле Н.Данфорда [1].

Лемма 1. Оператор T самосопряжен и положительно определен.

Доказательство. В самом деле, для любого $y \in H$

$$(Ty,y)=\int_0^1(-\ddot{y}(t)\cdot\overline{y(t)})dt=-\dot{y}(t)\overline{y(t)}\Big|_0^1+\int_0^1|\dot{y}(t)|^2dt.$$

В силу условия (2), для любого решения $y(t)$ задачи (1), (2)

$$y(0)=e^{ib}y(1),\quad \dot{y}(0)=e^{ib}\cdot\dot{y}(1) \tag{3}$$

и

$$-\dot{y}(t)\overline{y(t)}\Big|_0^1=\dot{y}(0)\overline{y(0)}-\dot{y}(1)\overline{y(1)}=0.$$

Поэтому

$$(Ty,y)\geq 0 \tag{4}$$

для всякой комплекснозначной функции $y(t)$, удовлетворящей условиям (2) и такой, что

$$\ddot{y}(t)\in L_2[0,1].$$

Отсюда следует, что T самосопряжен и положительно определен. Лемма доказана.

Теперь найдем спектр $\sigma(T)$ оператора T.

Лемма 2.

$$\sigma(T)=\{\lambda_k:\lambda_k=(b+2k\pi)^2,\, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что уравнение

$$Ty=y \tag{6}$$

имеет следующий скалярный вид:

$$-\ddot{y}=\lambda y, \tag{7}$$

$$y(0)=e^{ib}y(1),\ \dot{y}(0)=e^{ib}\dot{y}(1). \tag{8}$$

Общее решение скалярного уравнения (7) имеет вид

$$y(t)=C_1e^{i\sqrt{\lambda}t}+C_2e^{-i\sqrt{\lambda}t},$$

где λ, как следует из (4), можно заранее считать положительным. Учитывая краевые условия (8) приходим к заключению, что

$$y(t)=y_0e^{\pm\sqrt{\lambda}t},$$

где

$$\pm\sqrt{\lambda}=2k\pi+b,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Поэтому спектр задачи (7), (8) имеет вид

$$\lambda_k=(2k\pi+b)^2,\, k=0,\pm1,\pm2,\ldots. \tag{9}$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

В дальнейшем нам понадобится следующий важный факт из ([1], теорема 7, стр. 385):

Теорема 1. Пусть T – дискретный спектральный оператор в слабо-полном пространстве X и пусть E – его разложение единицы. Предположим, что проектор $E(\lambda)$ одномерен для всех точек λ спектра, за возможным исключением конечного их числа. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$ ($\rho(T)$ – резольвентное множество оператора T), $0 \le \nu < 1$ и P – такой оператор, что $D(P) \supseteq D((T - \lambda_0 I)^{\nu})$, а оператор $P(T - \lambda_0 I)^{-\nu}$ ограничен. Пусть $\{\lambda_n\}$ есть спектр $\sigma(T)$. Обозначим через d_n расстояние от точки $\lambda_n \in \sigma(T)$ до множества $\sigma(T) \setminus \{\lambda_n\}$. Тогда, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-1}(|\lambda_n| + d_n)^{\nu} < \infty,$$

то $T + P$ есть дискретный спектральный оператор. Если же

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-2}(|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} < \infty$$

и X – гильбертово пространство, то $T + P$ есть дискретный спектральный оператор.

Верна следующая

Лемма 3. Спектр оператора T является простым и для чисел d_k из теоремы 1 справедливы оценки

$$d_k \ge c_0 2\pi|k| \; (1 + o(1)), \quad |k| \to \infty. \tag{10}$$

Кроме того,

$$4c_0'\pi|k| \ge d_k \ge c_0\pi|k| \tag{11}$$

при $|k| \to \infty$. Здесь, c_0 и c_0' – некоторые постоянные, не зависящие от k.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что согласно (9)

$$|\lambda_k - \lambda_m| = \left|(2k\pi + b)^2 - (2m\pi + b)^2\right| =$$

$$= |2k\pi + b + 2m\pi + b| \cdot |2k\pi + b - 2m\pi - b| =$$

$$= 2|(k + m)\pi + b| \cdot 2|k - m| \cdot \pi$$

Отсюда следует, что

$$d_k = \inf_{m : m \ne k} |\lambda_k - \lambda_m| > 0 \tag{12}$$

и выполняются неравенства (10) и (11). Лемма доказана.

Пользуясь теоремой 1 и ограниченностью оператора $A(t)$ в пространстве H приходим к заключению:

Теорема 2. Оператор $T+A$ является спектральным оператором в пространстве $H=L_2([0,1];C)$.

Доказательство. Действительно, достаточно проверить последнее условие теоремы 1, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{-2}(|\lambda_k|+d_k)^{2\nu} \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_1}{|k|^{2-4\nu}} < \infty$$

при $\nu < \dfrac{1}{4}$ и $c_1 = const$.

Теперь, учитывая предыдущие леммы, получаем справедливость данной теоремы.

Важным является также следующая

Теорема 3. Оператор $T+A$ является дискретным. Точки спектра $\lambda_k \in \sigma(T+A)$ при $|\lambda_k| \ge r$ и достаточно большом r простые, а система собственных и присоединенных элементов образует безусловный базис в пространстве $H=L_2([0;1];C)$.

Доказательство. Рассмотрим резольвенту

$$R_\lambda = (\lambda I - T - A)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}(I - A(\lambda I - T)^{-1})^{-1} \qquad (13)$$

оператора $T+A$. Параметр λ возьмем на границе квадрата γ_k (см. рис. 1). Сторона этого квадрата равна $d_k/2$ и λ_k находится в центре этого квадрата.

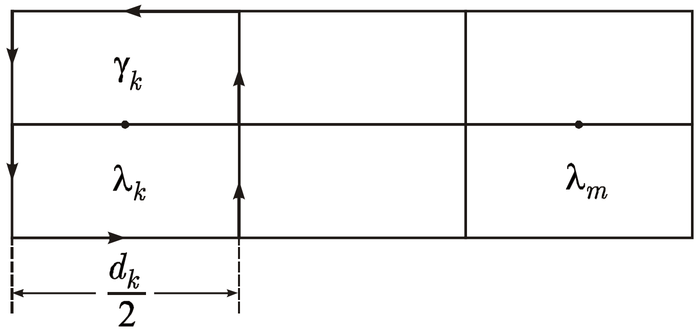

Рис. 1.

В силу формулы (11) (правое неравенство) существует $k_0 > 0$, такое, что при $|k| > k_0$

$$\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|_H \le \frac{2}{|k|}, \tag{14}$$

где $\lambda \in \gamma_k$, $c_2 = const$. Поскольку $\|A(t)\|_H = a_0$, то можно считать, что

$$\left\|A(\lambda I - T)^{-1}\right\|_H \le \frac{a_0 c_1}{|q|} < 1 \tag{15}$$

при $|k| > k_0$.

Следовательно, R_λ существует при $\lambda \in \gamma_k$ и справедлива формула

$$R_\lambda = R_\lambda^0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_\lambda^0 (A R_\lambda^0)^m, \tag{16}$$

где, для сокращения, мы положили $R_\lambda^0 = (\lambda I - T)^{-1}$. В силу (15) ряд справа в (16) сходится равномерно при $\lambda \in \gamma_k$ и

$$\left\|\sum_{m=1}^{\infty} R_\lambda^0 (A R_\lambda^0)^m\right\| \le \frac{c_3}{|k|^2}, \tag{17}$$

$|k| > k_0$ и $c_3 = const$.

Введем теперь два проекционные оператора

$$P_k^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R_\lambda^0 d\lambda, \qquad P_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R_\lambda d\lambda. \tag{18}$$

Учитывая (16), получаем

$$\left\|P_k - P_k^0\right\|_H = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\gamma_k} \sum_{m=1}^{\infty} R_\lambda^0 (A R_\lambda^0)^m \, d\lambda\right\|_H \le \frac{c_4 \cdot |k|}{|k|^2} = \frac{c_4}{|k|} < 1$$

при $|k| > k_0$.

При оценке нормы разности проекторов использовано неравенство (17), а также левое неравенство (11), согласно которому периметр границы квадрата γ_k есть $O(|k|)$.

Поскольку проектор P_k^0 одномерен, то P_k также одномерен. Следовательно, внутри γ_k имеется лишь одно простое собственное значение оператора $T + A$. Других собственных значений оператора $T + A$ в полосе $|\mathrm{Im}\lambda| \le a_0$ при условии $\mathrm{Re}\lambda > r$ нет. Тем самым теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Данфорд и Дж.Т.Шварц. Линейные операторы (спектральные операторы), «Мир», Москва, 1974, 661 стр.
2. И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., Наука, 1969, 448 стр.
3. А.М.Ахмедов. О кратных разложениях по системе собственных и присоединенных элементов некомпактных полиномиальных операторных пучков, ДАН СССР, т.292, №5, 1987, стр. 1033-1036.

BİR SİNİF DİFERENSİAL OPERATORLARIN SPEKTRALLIĞI

Ə.M.ƏHMƏDOV, N.Q.QULİYEV

ANNOTASİYA

İş $H = L_2([0;1];C)$ fəzasında (C – kompleks müstəvidir) bir sinif öz-özünə qoşma olmayan diferensial operatorların spektrallığının və digər spektral xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Baxılan operatorların spektrallıq və diskretliyi, həmçinin məxsusi və qoşma elementləri sisteminin şərtsiz bazisliyi haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

SPECTRALICITY OF A CLASS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

A.M.AKHMEDOV, N.G.GULIYEV

ABSTRACT

The present work is devoted to the studing of the spectralicity and other spectral properties of a class of nonselfadjoint differential operators in the space $H = L_2([0;1];C)$, where C – complex plane. The spectralicity and descreetness, and also unconditional basisity of the system of eigen – and adjoint elements of considering operators are proved.